幾何学 2 第 2回
距離空間の概要、ユークリッド平面

野本 慶一郎
明星大学 教育学部 教育学科

2025 年 9 月 24 日

簡単な自己紹介

明星大学 MEISEI UNIVERSITY

- 名前: 野本 慶一郎
  生年月日: 1995 年 9 月 8 日 (30 歳)
- 愛知教育大学 教育学部 中等教育教員養成課程 数学専攻 修了
  九州大学大学院 数理学府 修士課程・博士課程 修了
- 現在は企業で暗号アルゴリズムの研究開発をしています.
- 好きなもの: ビール, ルービックキューブ, マンガ・アニメ, 東海オンエア,
  Acid Black Cherry, UNISON SQUARE GARDEN, Aooo,
  NOMELON NOLEMON, YOASOBI, 結束バンド...

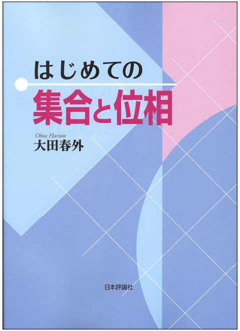
講義について

授業の進め方について

- 基本的に対面・板書形式で授業を行います. (今日だけはスライドで講義します)
- 欠席したり講義の内容が理解できなくなったときは, 配布した講義ノートを参考にしてください. また, 毎回演習問題を配布するので, 理解度を上げるためにも是非時間のあるときに解いてください.
- 授業構成は以下の通りとします.

講義 60 分　＋　演習 30 分

- 教科書：大田春外,「はじめての集合と位相」, 日本評論社.



成績評価について

- 成績はレポート (1 回) と確認テスト (2 回) を評価して行います.
- レポートや確認テストは実施前に告知します.
- 成績の内訳：

  レポート 20 点　＋　(前半) 確認試験 40 点　＋　(後半) 確認試験 40 点

  合計 60 点以上で単位が出ます.

質問について

明星大学 MEISEI UNIVERSITY

- 講義内容等について質問がある場合,
明星 LMS の個別指導 (コレクション) を活用してください.
- もしくは私のメールアドレスに連絡をください.

keiichiro.nomoto@meisei-u.ac.jp

幾何学 2 で学ぶこと

- 本講義では, 距離空間の基礎の習得を目標とします.
- 距離空間とは簡単に言えば

  距離を測ることによって, 要素同士の近さを統一的に扱える集合

  のことです.

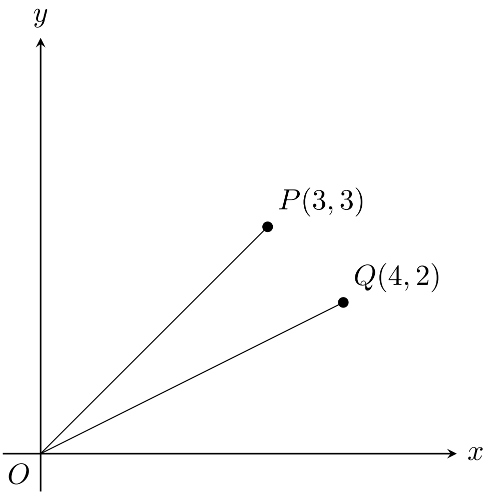
- 直線 OP の長さは

$$\overline{OP} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

直線 OQ の長さは

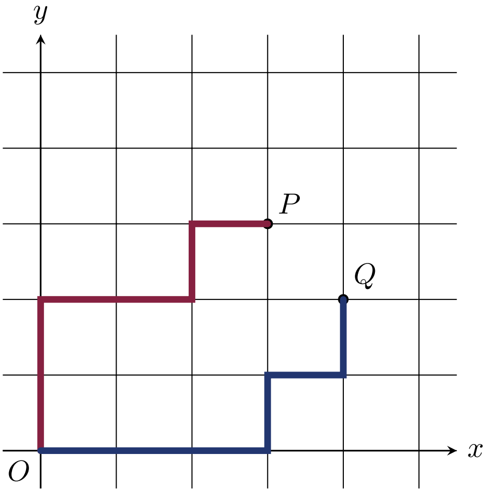
$$\overline{OQ} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

- よって原点により近いのは点 P.



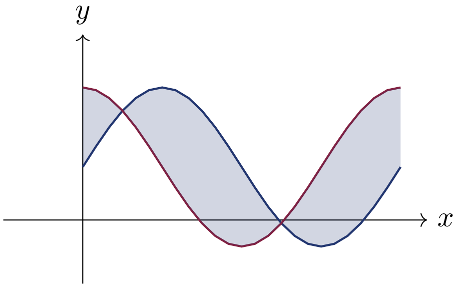
- 点 P までの距離は 6.
  点 Q までの距離も 6.
- よって同じ近さであると言える？

同じ集合でも色々な
“距離” の概念が考えられそう.



- 二つの関数 f, g に対しても，
  その間の面積が小さい方が近いと言えそう．

点以外の対象に対しても
“距離” を考えられそう．



- 距離の測り方は一つではない.
- 同じ集合でも距離の測り方が変われば, "距離" が変わることがある.
- 距離を測ることのできる対象は, xy 平面上の点のみではない.

ある集合 X に対して "距離" という概念を組み込んだものを距離空間といいます.
当然, 距離空間の代表的な例は xy 平面 (つまり $\mathbb{R}^2$) や xyz 空間 (つまり $\mathbb{R}^3$) です.

- 数列の収束性, 関数の連続性をより広い視点から捉えられる:
  - ・数列の収束性は, 数列の極限値への "近づき具合" の話.
  - ・関数の連続性は, x 座標の "近づき具合" に対する y 座標の "近づき具合" の話.
- 抽象的な議論への慣れ:
  - ・距離空間は, 微積や線形代数と大きく様相が異なり, 抽象度が高い概念です.
  - ・演習問題も「積分を計算せよ」や「行列式を計算せよ」といった具体的なものではなく,「—の定義を答えよ」や「—の証明をせよ」といったものが多くなります.

抽象化の必要性

- 既に知っているもの ($\mathbb{R}^2$ 等) をわざわざ距離空間として抽象的に考える意味とは？ と思う人もいるもしれません.
- その意味はいくつもありますが, 教員という立場から幾つか挙げてみます.
  1. 複雑な概念に対して重要なポイントを見抜く力を養う
  2. 幅広い視点を持ち, 生徒ごとに合わせたサポートを可能とする
  3. 他分野との繋がりを理解するのに役立つ
  4. 受験問題への対策
- もう皆さんは抽象化によって恩恵が得られることを体感しているはずです. (文字式, 二次方程式, 数列, 微分積分, 行列, . . .)

復習

明星大学 MEISEI UNIVERSITY

■ 集合とは「もの」の集まりのこと．もの a が集合 A に属すことを

$$a \in A \quad \text{または} \quad A \ni a$$

と書く (a は集合 A の要素であるという).

Example (外延的記法: 要素を全て列挙)

- $\{-0.4, \sqrt{2}, 3+2i, \pi\}$
- $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $\{\{-1, 1\}, \{a, b, c, d\}, \{f, g, h\}\}$

Example (内包的記法: 条件で要素を指定)

- $\{x \mid x^3 - x = 0\} \quad (= \{-1, 0, 1\})$
- $\{n^2 \mid n \in \{1, 3, 5\}\} \quad (= \{1^2, 3^2, 5^2\} = \{1, 9, 25\})$

Definition

集合 X と集合 Y に対して

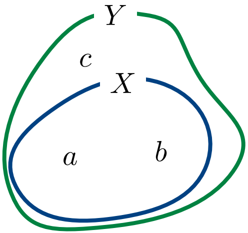
$$\text{任意の } x \in X \text{ に対して}, \ x \in Y$$

が成り立つとき $X \subset Y$ と表す.

■ 集合 X と集合 Y が等しい $(X = Y)$ というのは

$$X \subset Y \quad \text{かつ} \quad Y \subset X$$

ということ.



$$X = \{a, b\}, \ Y = \{a, b, c\}$$

代表的な集合

明星大学 MEISEI UNIVERSITY

- 数学においてよく用いられる集合には記号が用意されている．

$\mathbb{N}$: 自然数のなす集合	(**N**atural number (英))
$\mathbb{Z}$: 整数のなす集合	(**Z**halen (独))
$\mathbb{Q}$: 有理数のなす集合	(**Q**uotient (英))
$\mathbb{R}$: 実数のなす集合	(**R**eal number (英))
$\mathbb{C}$: 複素数のなす集合	(**C**omplex number (英))

- これらの集合の間の包含関係は次の通り．

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

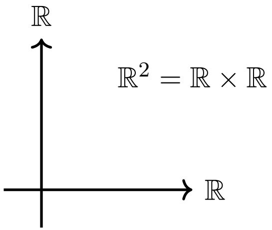
Definition (直積集合)

集合 X, Y に対して, (x, y) $(x \in X, y \in Y)$ という組全体の集合を $X \times Y$ と書き,
集合 X, Y の直積集合と呼ぶ.

$$X \times Y = \{(x, y) \,|\, x \in X, y \in Y\}$$

- 集合 A に対して $A^2 := A \times A$ と書く.
  より一般に以下のように書く.

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n\text{個}}$$



Definition (写像)

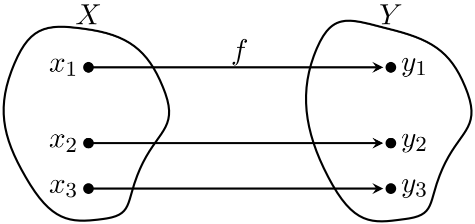
X, Y を集合とする．f が X から Y への写像であるとは

$$x \in X \text{ に対して } f(x) \in Y \text{ を対応付ける規則 “} x \mapsto f(x) \text{”}$$

が定まっていること．$f : X \to Y$ と書く．

Example

- 実数を二乗する関数 f:
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$
- 二つの実数間の距離を返す関数 g:
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto |x - y|$$



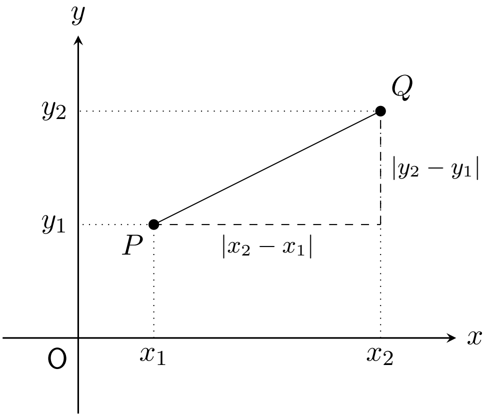
ユークリッド空間

■ xy 平面上の 2 点

$$P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2)$$

の距離 $\overline{PQ}$ は, 三平方の定理を用いることで次のように計算できる.

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



- 3 次元空間の 2 点 $P=(x_1,y_1,z_1), Q=(x_2,y_2,z_2)$ について，2 点間の長さ $\overline{PQ}$ は次のようにして計算できた．

$$\overline{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

- これらの長さを n 次元に拡張する．
- n 次元空間の点 $P\in\mathbb{R}^n$ の座標を明示的に表すときに，$P=(x_1,y_1,z_1,w_1,\ldots)$ と書いてしまうとアルファベットの文字数が足りない等の不都合があるので，これ以降は

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4,\ldots,x_{n-1},x_n)$$

のように書く．

ユークリッド距離

Definition (教科書 p.101 定義 8.1)

$\mathbb{R}^n$ の任意の 2 点 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ に対して

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \quad \left(= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\right)$$

を x, y 間の (n 次元) ユークリッド距離という.

ユークリッド距離の例1

Example ($\mathbb{R}^1$)

$x = 2, y = 5$ に対するユークリッド距離は次のように計算される:

$$d_2(x, y) = \sqrt{(2-5)^2} = |2-5| = 3.$$

Example ($\mathbb{R}^2$)

$x = (-1, 2), y = (3, -5)$ に対するユークリッド距離は次のように計算される:

$$d_2(x, y) = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-(-5))^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}.$$

ユークリッド距離の例 2

Example ($\mathbb{R}^5$)

$x = (1, 0, -2, -3, 5), y = (-1, 2, 0, -7, 3)$ 間のユークリッド距離は次のように計算される:

$$\begin{aligned} d_2(x, y) &= \sqrt{(1 - (-1))^2 + (0 - 2)^2 + (-2 - 0)^2 + (-3 - (-7))^2 + (5 - 3)^2} \\ &= \sqrt{4 + 4 + 4 + 16 + 4} \\ &= \sqrt{32} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

- ユークリッド距離 $d_2(x, y)$ は, $\mathbb{R}^n$ の 2 点 x, y に対して距離という実数を対応させる関数として見ることができる:

$$d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d_2(x, y)$$

  この写像 d_2 をユークリッド距離関数という.

- 次々回以降で, 色々な距離関数を導入する. したがって, ただ集合 $\mathbb{R}^n$ と書いただけではどのような距離で測るのか分からなくなってしまう.
- これを回避するために, 単に $\mathbb{R}^n$ と書くのではなく, 集合 $\mathbb{R}^n$ と距離関数 d_2 をどちらも明記して, $(\mathbb{R}^n, d_2)$ と書くことがある.

Definition (教科書 p.102 定義 8.3)

$\mathbb{R}^n$ とユークリッド距離関数 d_2 の組 $(\mathbb{R}^n, d_2)$ を n 次元ユークリッド空間といい, $\mathbb{E}^n$ で表す.

$$\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, d_2)$$

Example

$\mathbb{E}^3$ の 2 点 $x = (-1, 0, 3), y = (2, 1, -1)$ の距離は以下の通り:

$$d_2(x, y) = \sqrt{(-1-2)^2 + (0-1)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{26}.$$

(どの距離関数なのかは明記していないが,「$\mathbb{E}^3$」の点の距離なのでユークリッド距離に限定される.)