この演習問題では以下の Cauchy–Shwartz の不等式を用いてもよい．ただし，使用する際はその旨を述べること．

$$\text{任意の } a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R} \text{ に対して，} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2.$$

1. $d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を 2 次元ユークリッド距離関数とする．このとき任意の 3 点 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して，以下の 3 つの性質が成り立つことを示せ．(つまり講義中に説明した $n = 2$ の場合の証明を，なるべくノートを見ずにもう一度自分の手で書いてみてください.)

(a) $d_2(x, y) \geq 0$. さらに $d_2(x, y) = 0 \iff x = y$.

(解答例) d_2 の定義より

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \ \geq 0$$

である．また，$d_2(x, y) = 0$ であることと $(x_1 - y_1)^2 = (x_2 - y_2)^2 = 0$ であることは同値である．したがって $x_1 = y_1$ かつ $x_2 = y_2$ が成り立つこと，すなわち $x = y$ が成り立つこととも同値である．

(b) $d_2(x, y) = d_2(y, x)$.

(解答例) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $(a - b)^2 = (b - a)^2$ が成り立つことに気をつければ，ユークリッド距離関数の定義より

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = d_2(y, x)$$

が成り立つ．

(c) $d_2(x, z) \leq d_2(x, y) + d_2(y, z)$.

(解答例) 示すべき不等式は

$$\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2} \tag{1}$$

である．ここで，簡単のため $a_i = x_i - y_i, b_i = y_i - z_i$ とおく．このとき $x_i - z_i = a_i + b_i$ であり，(1) は

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \tag{2}$$

と書き換えられる．さらに (2) の両辺は非負であるから，両辺を 2 乗した

$$(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 \leq \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}\right)^2 \tag{3}$$

を示せばよい．(3) の右辺から左辺を引くと

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}\right)^2 - (a_1 + b_1)^2 - (a_2 + b_2)^2 \\
&= \left[a_1^2 + a_2^2 + 2\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} + b_1^2 + b_2^2\right] - \left[a_1^2 + 2a_1 b_1 + b_1^2 + a_2^2 + 2a_2 b_2 + b_2^2\right] \\
&= 2\left(\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} - (a_1 b_1 + a_2 b_2)\right) \\
&\geq 0 \quad (\because \text{Caushy–Shwartz の不等式})
\end{aligned}$$

となる．したがって (3) ならびに (1) が示された．

2. $d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を n 次元ユークリッド距離関数とする．このとき任意の 3 点 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n), z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して, 以下の 3 つの性質が成り立つことを示せ.

(a) $d_2(x,y) \geq 0$. さらに $d_2(x,y) = 0 \iff x = y$.
d_2 の定義より

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \geq 0$$

である．また, $d_2(x,y) = 0$ であることと全ての i $(1 \leq i \leq n)$ に対して $(x_i - y_i)^2 = 0$ であることは同値である. よって全ての i $(1 \leq i \leq n)$ に対して $x_i = y_i$ が成り立つこと, すなわち $x = y$ が成り立つこととも同値である.

(b) $d_2(x,y) = d_2(y,x)$.
(解答例) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $(a-b)^2 = (b-a)^2$ が成り立つことに気をつければ, ユークリッド距離関数の定義より

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2} = d_2(y,x)$$

が成り立つ.

(c) $d_2(x,z) \leq d_2(x,y) + d_2(y,z)$.
(解答例) 示すべき不等式は

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2} \tag{4}$$

である．ここで, 簡単のため $a_i = x_i - y_i, b_i = y_i - z_i$ とおく．このとき $x_i - z_i = a_i + b_i$ であり, (4) は

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2} \tag{5}$$

と書き換えられる．さらに (5) の両辺は非負であるから, 両辺を 2 乗した

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2 \tag{6}$$

を示せばよい．(6) の右辺から左辺を引くと

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n}a_i^2 + 2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)} + \sum_{i=1}^{n}b_i^2\right] - \left[\sum_{i=1}^{n}a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i + \sum_{i=1}^{n}b_i^2\right] \\
&= 2\left(\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)} - \sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right) \\
&\geq 0 \quad (\because \text{Cauchy–Shwartz の不等式})
\end{aligned}$$

となる．したがって (6) ならびに (4) が示された.