この演習問題では以下の Cauchy–Shwartz の不等式を用いてもよい. ただし, 使用する際はその旨を述べること.

$$\text{任意の } a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R} \text{ に対して, } \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2.$$

1. $d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を 2 次元ユークリッド距離関数とする. このとき任意の 3 点 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して, 以下の 3 つの性質が成り立つことを示せ. (つまり講義中に説明した $n = 2$ の場合の証明を, なるべくノートを見ずにもう一度自分の手で書いてみてください.)

   (a) $d_2(x, y) \geq 0$. さらに $d_2(x, y) = 0 \iff x = y$.

   (b) $d_2(x, y) = d_2(y, x)$.

   (c) $d_2(x, z) \leq d_2(x, y) + d_2(y, z)$.

2. $d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を n 次元ユークリッド距離関数とする．このとき任意の 3 点 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n), z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して, 以下の 3 つの性質が成り立つことを示せ.

(a) $d_2(x, y) \geq 0$. さらに $d_2(x, y) = 0 \iff x = y$.

(b) $d_2(x, y) = d_2(y, x)$.

(c) $d_2(x, z) \leq d_2(x, y) + d_2(y, z)$.