1. 関数 $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad (x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n))$$

により定義する．このとき, $(\mathbb{R}^n, d_1)$ が距離空間となることを証明せよ．

(解答例) 任意に $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n), z = (z_1, \dots, z_n)$ を取る．

(1) d_1 の定義から

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \geq 0$$

が従う．さらに上記式より $d_1(x,y) = 0$ であることと全ての i $(1 \leq i \leq n)$ について $x_i = y_i$ であることは同値, すなわち $x = y$ であることは同値である．

(2) d_1 の定義から

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d_1(y,x)$$

が成り立つ．

(3) d_1 の定義から

$$\begin{aligned} d_1(x,z) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i + y_i - z_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| \quad (\because \text{任意の } a, b \in \mathbb{R} \text{ に対して } |a+b| \leq |a| + |b|) \\ &= d_1(x,y) + d_1(y,z) \end{aligned}$$

が成り立つ．

以上より $(\mathbb{R}^n, d_1)$ は距離空間である．

2. 次のように定められた関数 d は全て $\mathbb{R}^2$ 上の距離関数ではない．それぞれの d について反例を挙げよ．ただし，$x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ とする．

(a) $d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}-1.$

(解答例) $x=(0,0), y=(0,0)$ が反例．実際

$$d(x,y)=\sqrt{0^2+0^2}-1=-1<0$$

である．

(b) $d(x,y)=\left|x_1^2-y_1^2\right|+\left|x_2^2-y_2^2\right|.$

(解答例) $x=(1,0), y=(-1,0)$ が反例．実際，$x\neq y$ であるが

$$d(x,y)=\left|1^2-(-1)^2\right|+\left|0^2-0^2\right|=0$$

である．

(c) $d(x,y)=\sqrt{(2x_1-y_1)^2+(2x_2-y_2)^2}.$

(解答例) $x=(0,0), y=(1,0)$ が反例．実際

$$\begin{aligned} d(x,y)&=\sqrt{(0-1)^2+(0-0)^2}=1\\ d(y,x)&=\sqrt{(2-0)^2+(0-0)^2}=2 \end{aligned}$$

となって $d(x,y)\neq d(y,x)$ である．

(d) $d(x,y)=(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2.$

(解答例) $x=(0,0), y=(1,0), z=(2,1)$ が反例．実際

$$\begin{aligned} d(x,z)&=(0-2)^2+(0-1)^2=5\\ d(x,y)&=(0-1)^2+(0-0)^2=1\\ d(y,z)&=(1-2)^2+(0-1)^2=2 \end{aligned}$$

なので三角不等式 $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ を満たしていない．