

1. 関数 $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad (x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n))$$

により定義する。このとき、 (\mathbb{R}^n, d_1) が距離空間となることを証明せよ。

2. 次のように定められた関数 d は全て \mathbb{R}^2 上の距離関数ではない。それぞれの d について反例を挙げよ。ただし、 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ とする。

(a) $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} - 1.$

(b) $d(x, y) = |x_1^2 - y_1^2| + |x_2^2 - y_2^2|.$

(c) $d(x, y) = \sqrt{(2x_1 - y_1)^2 + (2x_2 - y_2)^2}.$

(d) $d(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2.$