

1. 数列  $a_n = 1/2n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) に対して, 以下の問い合わせに答えよ.

(a)  $\varepsilon = 0.1$  に対して  $|a_n| < \varepsilon$  を満たす  $n$  の条件を答えよ.

(b)  $\varepsilon = 0.01$  に対して  $|a_n| < \varepsilon$  を満たす  $n$  の条件を答えよ.

(c) 実数  $\varepsilon (> 0)$  に対して  $|a_n| < \varepsilon$  を満たす  $n$  の条件を答えよ.

(d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  を  $\varepsilon$ - $N$  論法に基づいて示せ.

2. 数列  $a_n = 1 - 1/n^2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) に対して, 以下の問い合わせに答えよ.

(a)  $\varepsilon = 0.1$  に対して  $|a_n - 1| < \varepsilon$  を満たす  $n$  の条件を答えよ.

(b)  $\varepsilon = 0.01$  に対して  $|a_n - 1| < \varepsilon$  を満たす  $n$  の条件を答えよ.

(c) 実数  $\varepsilon (> 0)$  に対して  $|a_n - 1| < \varepsilon$  を満たす  $n$  の条件を答えよ.

(d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$  を  $\varepsilon$ - $N$  論法に基づいて示せ.

3. 漸化式  $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{2}$  で定まる数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  に対して, 以下の問いに答えよ.

(a) 数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  は収束すると仮定する. このとき極限値  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$  であることを利用して求めよ.

(b)  $|a_n - 1| = \frac{1}{2}|a_{n-1} - 1| (n \geq 2)$  を証明せよ.

(c)  $|a_n - 1| = \frac{1}{2^n} (n \geq 1)$  を証明せよ.

(d)  $\varepsilon$ - $N$  論法に基づいて,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$  であることを証明せよ.