

1. 数列 $a_n = 1/2n$ ($n \in \mathbb{N}$) に対して, 以下の問いに答えよ.
 - (a) $\varepsilon = 0.1$ に対して $|a_n| < \varepsilon$ を満たす n の条件を答えよ.
 - (b) $\varepsilon = 0.01$ に対して $|a_n| < \varepsilon$ を満たす n の条件を答えよ.
 - (c) 実数 $\varepsilon(> 0)$ に対して $|a_n| < \varepsilon$ を満たす n の条件を答えよ.
 - (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ を ε - N 論法に基づいて示せ.

2. 数列 $a_n = 1 - 1/n^2$ ($n \in \mathbb{N}$) に対して, 以下の問いに答えよ.
 - (a) $\varepsilon = 0.1$ に対して $|a_n - 1| < \varepsilon$ を満たす n の条件を答えよ.
 - (b) $\varepsilon = 0.01$ に対して $|a_n - 1| < \varepsilon$ を満たす n の条件を答えよ.
 - (c) 実数 $\varepsilon(> 0)$ に対して $|a_n - 1| < \varepsilon$ を満たす n の条件を答えよ.
 - (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ を ε - N 論法に基づいて示せ.

3. 漸化式 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{2}$ で定まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ に対して, 以下の問いに答えよ.

(a) 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ は収束すると仮定する. このとき極限值 $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$ であることを利用して求めよ.

(b) $|a_n - 1| = \frac{1}{2}|a_{n-1} - 1|$ ($n \geq 2$) を証明せよ.

(c) $|a_n - 1| = \frac{1}{2^n}$ ($n \geq 1$) を証明せよ.

(d) ε - N 論法に基づいて, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ であることを証明せよ.