1. 数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が α に収束することの, ε-N 論法による定義を答えよ.

   (解答例 1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して,「$N_\varepsilon < n$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$」が成り立つ.
   (解答例 2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,「$N_\varepsilon < n$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$」が成り立つような $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在する.

2. 以下は数列 $a_n = 1/n^2$ $(n \in \mathbb{N})$ に対して $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを, ε-N 論法に基づいて証明しようとした, **間違った証明**である. (1) 間違っている点, (2) どのように修正すればよいか, (3) 正確な証明, を記せ.

> 任意に $\varepsilon > 0$ を取る. このとき, ある $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して「$N_\varepsilon < n \Longrightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$」が成り立つ.
> 何故ならば, $N_\varepsilon < n$ のとき
>
> $$\begin{aligned} |a_n - 0| &= \frac{1}{n^2} \quad (\because a_n \text{ の定義}) \\ &< \frac{1}{N_\varepsilon^2} \quad (\because N_\varepsilon < n) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$
>
> であるから. よって $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ.

(解答例)

(1) $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ の存在を示していない.[*1] それゆえに不等式「$1/N_\varepsilon^2 < \varepsilon$」が成り立つ理由が書かれていない (書けない).

(2)「$1/N_\varepsilon^2 < \varepsilon$」が成り立つように $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を取りたいので, この不等式を N_ε について解くと $N_\varepsilon > 1/\sqrt{\varepsilon}$ となる. したがって $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を

$$N_\varepsilon > \tfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ を満たす自然数}$$

として取る旨を書けばよい.

(3) 任意に $\varepsilon > 0$ を取る. このとき, $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を不等式 $N_\varepsilon > 1/\sqrt{\varepsilon}$ を満たすように取ると

$$N_\varepsilon < n \Longrightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$$

が成り立つ. 実際, $N_\varepsilon < n$ ならば

$$\begin{aligned} |a_n - 0| &= \frac{1}{n^2} \quad (\because a_n \text{ の定義}) \\ &< \frac{1}{N_\varepsilon^2} \quad (\because N_\varepsilon < n) \\ &< \varepsilon \quad (\because N_\varepsilon > 1/\sqrt{\varepsilon}) \end{aligned}$$

であるから. よって $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ.

[*1] 例えば「方程式 $x^2 + 1 = 0$ の実数解の一つを α とおく.」という論理は間違っている. 何故ならば $x^2 + 1 = 0$ に実数解は存在しないからである. このように,「条件 $\sim$ を満たす $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在する」と主張したい場合は注意が必要である.

3. 以下は数列 $a_n = 1/(n+3)$ $(n \in \mathbb{N})$ に対して $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを, ε-N 論法に基づいて証明しようとした, **間違った証明**である. (1) 間違っている点, (2) どのように修正すればよいか, (3) 正確な証明, を書け.

> 任意に $\varepsilon > 0$ を取る. このとき $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して「$N_\varepsilon < n \Longrightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$」が成り立つ.
> 何故ならば, $\varepsilon = 0.1$ として $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を $N_\varepsilon > 8$ を満たす自然数とすると, $N_\varepsilon < n$ ならば
>
> $$\begin{aligned} |a_n - 0| &= \frac{1}{n+3} \quad (\because a_n \text{ の定義}) \\ &< \frac{1}{N_\varepsilon + 3} \quad (\because N_\varepsilon < n) \\ &< \frac{1}{8+3} \quad (\because N_\varepsilon > 8) \\ &< 0.1 \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$
>
> であるから. よって $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ.

(解答例)

(1) ε は任意の値としなければいけないはずが, 0.1 という特定の値のみしか考えていない.

(2) ε を特定の値に限定せず, 文字のまま証明を行う. 具体的には「$1/(N_\varepsilon + 3) < \varepsilon$」が成り立つようにしたいので, この不等式を N_ε について解いて, $N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon} - 3$ となるような $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を取る旨を書けばよい.

(3) 任意に $\varepsilon > 0$ を取る. このとき, $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を不等式 $N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon} - 3$ を満たすように取ると

$$N_\varepsilon < n \Longrightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$$

が成り立つ. 実際, $N_\varepsilon < n$ ならば

$$\begin{aligned} |a_n - 0| &= \frac{1}{n+3} \quad (\because a_n \text{ の定義}) \\ &< \frac{1}{N_\varepsilon + 3} \quad (\because N_\varepsilon < n) \\ &< \varepsilon \quad (\because N_\varepsilon > 1/\varepsilon - 3) \end{aligned}$$

であるから. よって $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ.

発展. (成績には含めません．余力のある人は解いてみてください.) 数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は α に, 数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は β に収束すると仮定する．すなわち

- 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して,「$N_\varepsilon < n$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$」が成り立つ.
- 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して,「$M_\varepsilon < n$ ならば $|b_n - \beta| < \varepsilon$」が成り立つ.

が成り立っているとする．このとき, 数列 $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\alpha + \beta$ に収束することを, 以下の誘導に従って証明せよ.

(a) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $L_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を $L_\varepsilon = \max\{N_\varepsilon, M_\varepsilon\}$ とおく (N_ε と M_ε のうち最大のもの). このとき

$$L_\varepsilon < n \Longrightarrow \text{「}|a_n - \alpha| < \varepsilon \text{ かつ } |b_n - \beta| < \varepsilon\text{」}$$

ことを証明せよ.

(解答例)

$L_\varepsilon \in \mathbb{N}$ の定義より, $N_\varepsilon \leq L_\varepsilon$ かつ $M_\varepsilon \leq L_\varepsilon$ が成り立つ．$N_\varepsilon \leq L_\varepsilon$ および $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が α に収束することから

$$L_\varepsilon < n \Longrightarrow \ (N_\varepsilon < n \Longrightarrow)\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

となる．同様にして

$$L_\varepsilon < n \Longrightarrow \ (M_\varepsilon < n \Longrightarrow)\ |b_n - \beta| < \varepsilon$$

が成り立つ．以上より示された.

(b) 以下の不等式を証明せよ.

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta|.$$

(解答例)

任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $|a + b| \leq |a| + |b|$ であることより

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| = |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta|$$

が成り立つ.

(c) 数列 $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\alpha + \beta$ に収束することを証明せよ.

(解答例)

任意に $\varepsilon > 0$ を取る．数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は α に, 数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は β に収束するので, ある $N_\varepsilon, M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して

$$N_\varepsilon < n \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon \quad \text{かつ} \quad M_\varepsilon < n \Longrightarrow |b_n - \beta| < \varepsilon$$

が成り立つ．ここで, $L_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を $L_\varepsilon = \max\{N_\varepsilon, M_\varepsilon\}$ とおく．このとき, $N_\varepsilon \leq L_\varepsilon$ かつ $M_\varepsilon \leq L_\varepsilon$ である．したがって, $N_\varepsilon < n$ ならば

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

が成り立つ．まとめると

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $L_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して, $L_\varepsilon < n$ ならば $|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < 2\varepsilon$

が示された．ここで, $\varepsilon > 0$ が任意の値を取るならば $2\varepsilon > 0$ も任意の値を取ることに注意すると, これは数列 $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $\alpha + \beta$ に収束することを意味している.