1. 数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が α に収束することの, ε-N 論法による定義を答えよ.

2. 以下は数列 $a_n = 1/n^2$ $(n \in \mathbb{N})$ に対して $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを, ε-N 論法に基づいて証明しようとした, **間違った証明**である. (1) 間違っている点, (2) どのように修正すればよいか, (3) 正確な証明, を記せ.

> 任意に $\varepsilon > 0$ を取る. このとき, ある $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して「$N_\varepsilon < n \Longrightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$」が成り立つ.
> 何故ならば, $N_\varepsilon < n$ のとき
>
> $$\begin{aligned} |a_n - 0| &= \frac{1}{n^2} \quad (\because a_n \text{ の定義}) \\ &< \frac{1}{N_\varepsilon^2} \quad (\because N_\varepsilon < n) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$
>
> であるから. よって $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ.

3. 以下は数列 $a_n = 1/(n+3)$ $(n \in \mathbb{N})$ に対して $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを, ε-N 論法に基づいて証明しようとした, **間違った証明**である. (1) 間違っている点, (2) どのように修正すればよいか, (3) 正確な証明, を書け.

> 任意に $\varepsilon > 0$ を取る. このとき $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して「$N_\varepsilon < n \Longrightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$」が成り立つ.
> 何故ならば, $\varepsilon = 0.1$ として $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を $N_\varepsilon > 8$ を満たす自然数とすると, $N_\varepsilon < n$ ならば
>
> $$\begin{aligned} |a_n - 0| &= \frac{1}{n+3} \quad (\because a_n \text{ の定義}) \\ &< \frac{1}{N_\varepsilon + 3} \quad (\because N_\varepsilon < n) \\ &< \frac{1}{8+3} \quad (\because N_\varepsilon > 8) \\ &< 0.1 \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$
>
> であるから. よって $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ.

発展. (成績には含めません. 余力のある人は解いてみてください.) 数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は α に, 数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は β に収束すると仮定する. すなわち

- 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して,「$N_\varepsilon < n$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$」が成り立つ.
- 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して,「$M_\varepsilon < n$ ならば $|b_n - \beta| < \varepsilon$」が成り立つ.

が成り立っているとする. このとき, 数列 $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\alpha + \beta$ に収束することを, 以下の誘導に従って証明せよ.

(a) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $L_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を $L_\varepsilon = \max\{N_\varepsilon, M_\varepsilon\}$ とおく (N_ε と M_ε のうち最大のもの). このとき

$$L_\varepsilon < n \Longrightarrow \text{「}|a_n - \alpha| < \varepsilon \text{ かつ } |b_n - \beta| < \varepsilon\text{」}$$

ことを証明せよ.

(b) 以下の不等式を証明せよ.

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta|.$$

(c) 数列 $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\alpha + \beta$ に収束することを証明せよ.