1. $(\mathbb{R}^2, d_2)$ を距離空間とする．ここで，

$$d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{2}(x_i - y_i)^2} \quad (x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2))$$

である．このとき以下の問いに答えよ．

(a) $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n = (\frac{2}{n}, 1 + \frac{1}{n^2}) \in \mathbb{R}^2$ とする．また，$x = (0, 1)$ とする．このとき $d_2(x_n, x)$ を計算せよ．

(解答例) d_2 の定義より

$$d_2(x_n, x) = \sqrt{\left(\frac{2}{n} - 0\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{n^2} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^4}}$$

である．

(b) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ であることを証明せよ．ただし講義で述べたことは証明無しに用いてよい．

(解答例) (a) の結果及び $\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} = 0$ であることより

$$\lim_{n\to\infty} d_2(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = 0.$$

これは $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ であることと同値である．よって示された．

2. $(\mathbb{R}^2, d_1)$ を距離空間とする．ここで，

$$d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{2}|x_i - y_i| \quad (x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2))$$

である．このとき以下の問いに答えよ．

(a) $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n = (\frac{2}{n}, 1 + \frac{1}{n^2}) \in \mathbb{R}^2$ とする．また，$x = (0, 1)$ とする．このとき $d_1(x_n, x)$ を計算せよ．

(解答例) d_1 の定義より

$$d_1(x_n, x) = \left|\frac{2}{n} - 0\right| + \left|1 + \frac{1}{n^2} - 1\right| = \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$$

である．

(b) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ であることを証明せよ．ただし講義で述べたことは証明無しに用いてよい．

(解答例) (a) の結果及び $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ であることより

$$\lim_{n\to\infty} d_1(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 0.$$

これは $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ であることと同値である．よって示された．