

1. 対応  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3x$  に対して, 以下の問い合わせに答えよ.

(a)  $\varepsilon = 3$  に対して

$$|x - 1| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(1)| < \varepsilon$$

を満たす  $\delta_\varepsilon > 0$  の条件を一つ答えよ.

(解答例)  $|x - 1| < \delta_\varepsilon$  のとき

$$|f(x) - f(1)| = |3x - 3| = 3|x - 1| < 3\delta_\varepsilon$$

である. したがって  $3\delta_\varepsilon < 3$  となればいいから,  $0 < \delta_\varepsilon < 1$  が求める条件の一つである.

(b) 実数  $\varepsilon (> 0)$  に対して

$$|x - 1| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(1)| < \varepsilon$$

を満たす  $\delta_\varepsilon > 0$  の条件を一つ答えよ.

(解答例)  $|x - 1| < \delta_\varepsilon$  のとき

$$|f(x) - f(1)| = |3x - 3| = 3|x - 1| < 3\delta_\varepsilon$$

である. したがって  $3\delta_\varepsilon < \varepsilon$  となればいいから,  $0 < \delta_\varepsilon < \varepsilon/3$  が求める条件の一つである.

(c) 関数  $f$  は  $x = 1$  で連続であることを  $\varepsilon$ - $\delta$  論法に基づき示せ.

(解答例) 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,  $\delta_\varepsilon > 0$  を  $0 < \delta_\varepsilon < \varepsilon/3$  を満たすように取れば

$$|x - 1| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(1)| < \varepsilon$$

が成り立つ. 実際, そのような  $\delta_\varepsilon$  に対して  $|x - 1| < \delta_\varepsilon$  ならば

$$|f(x) - f(1)| = |3x - 3| = 3|x - 1| < 3\delta_\varepsilon < \varepsilon$$

である. よって示された.

(d) 関数  $f$  は連続 (すなわち全ての点  $x_0 \in \mathbb{R}$  で連続) であることを  $\varepsilon$ - $\delta$  論法に基づき示せ.

(解答例) 全ての点  $x_0 \in \mathbb{R}$  で  $f$  が連続であることを示す.

任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,  $\delta_\varepsilon > 0$  を  $0 < \delta_\varepsilon < \varepsilon/3$  を満たすように取れば

$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

が成り立つ. 実際, そのような  $\delta_\varepsilon$  に対して  $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$  ならば

$$|f(x) - f(x_0)| = |3x - 3x_0| = 3|x - x_0| < 3\delta_\varepsilon < \varepsilon$$

である. よって示された.

2. 関数  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$  は連続であることを  $\varepsilon$ - $\delta$  論法に基づき示せ.

(解答例) 全ての点  $x_0 \in \mathbb{R}$  で  $f$  が連続であることを示す.

任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,  $\delta_\varepsilon > 0$  を  $0 < \delta_\varepsilon < \sqrt{\varepsilon + |x_0|^2} - |x_0|$  を満たすように取れば

$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

が成り立つ. 実際, そのような  $\delta_\varepsilon$  に対して  $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$  ならば

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |x^2 - x_0^2| \\ &= |(x - x_0)(x + x_0)| \\ &= |(x - x_0)((x - x_0) + 2x_0)| \\ &= |(x - x_0)^2 + 2x_0(x - x_0)| \\ &\leq |x - x_0|^2 + 2|x_0| \cdot |x - x_0| \quad (\because \text{三角不等式}) \\ &< \delta_\varepsilon^2 + 2|x_0|\delta_\varepsilon \quad (\because |x - x_0| < \delta_\varepsilon) \\ &= (\delta_\varepsilon + |x_0|)^2 - |x_0|^2 \\ &< \varepsilon \quad (\because \delta_\varepsilon < \sqrt{\varepsilon + |x_0|^2} - |x_0|) \end{aligned}$$

である. よって示された.