1. 距離空間 $(\mathbb{R}^2, d_2)$ における原点 $O = (0,0)$ の ε 近傍 $U(O,\varepsilon)$ の定義を書き下せ．ただし

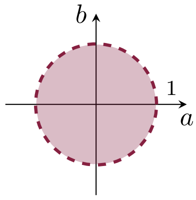
$$d_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} \quad (x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2))$$

である．

(解答例)

$$\begin{aligned} U(O,\varepsilon) &= \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, d_2((a,b),(0,0)) < \varepsilon\right\} \\ &= \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \sqrt{a^2+b^2} < \varepsilon\right\} \\ &= \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a^2+b^2 < \varepsilon^2\right\}. \end{aligned}$$

2. 問 (1) の状況の下, 近傍 $U(0,1)$ を図示せよ．



3. 距離空間 $(\mathbb{R}^2, d_1)$ における原点 $O = (0,0)$ の近傍 $U(O,1)$ を図示せよ．ただし

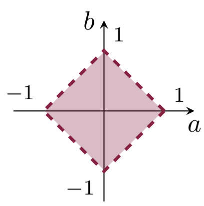
$$d_1(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| \quad (x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2))$$

である．

(解答例) 図示する集合は

$$\begin{aligned} U(O,\varepsilon) &= \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, d_1((a,b),(0,0)) < 1\right\} \\ &= \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |a|+|b| < 1\right\} \end{aligned}$$

である．条件 $|a|+|b|<1$ は変換 $a \mapsto -a, b \mapsto -b$ に対して変わらないので, $a \geq 0, b \geq 0$ の場合の集合を, a 軸および b 軸に対して反転させればよい．$a \geq 0, b \geq 0$ のとき, 条件 $|a|+|b|<1$ は $a+b<1$ となるので, $b < 1-a \leq 1$ より $b<1$ である (同様に $a<1$ である)．以上より不等式 $b < 1-a$ $(0 \leq a < 1)$ の満たすべき図形を a 軸と b 軸に対して反転させた以下が求める答えである．



4. 写像 $d_\infty : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \quad (x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2))$$

とおくと, d_∞ は $\mathbb{R}^2$ 上の距離関数, すなわち $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ は距離空間となる (ここでは証明しなくてよい). ただし, $\max\{a, b\}$ は a と b の内大きい方を返す関数である. また, $a = b$ の場合は $\max\{a, b\} = a = b$ である. このとき, 距離空間 $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ における原点 $O = (0, 0)$ の近傍 $U(O, 1)$ を図示せよ.

(解答例) 図示する集合は

$$\begin{aligned} U(O, \varepsilon) &= \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, d_\infty((a, b), (0, 0)) < 1\right\} \\ &= \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \max\{|a|, |b|\} < 1\right\} \end{aligned}$$

である. 条件 $\max\{|a|, |b|\} < 1$ は変換 $a \mapsto -a, b \mapsto -b$ に対して変わらないので, $a \geq 0, b \geq 0$ の場合の集合を, a 軸および b 軸に対して反転させればよい. $a \geq 0, b \geq 0$ のとき, 条件 $\max\{|a|, |b|\} < 1$ は $\max\{a, b\} < 1$ となる. $\max\{a, b\}$ を場合分けして書き下すと

$$\max\{a, b\} = \begin{cases} b & (b \geq a) \\ a & (b \leq a) \end{cases}$$

となる. つまり $b \geq a$ のときは $b < 1$ であり, $b \leq a$ のときは $a < 1$ となる範囲を図示して, a 軸と b 軸に対して反転させればよい.