この演習問題では以下の三つの事実を用いても良い.

1. 事実 (A): $f : X \to Y$ を距離空間の間の写像, $x \in X$ とする. このとき以下は同値である.
   (a) $f$ は点 $x$ で連続.
   (b) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ となる任意の $X$ 内の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.
2. 事実 (B): 集合 $A, B, C$ に対して, 写像 $f : A \to B, g : B \to C$ が全単射ならば, 合成写像 $g \circ f$ の逆写像は $f^{-1} \circ g^{-1}$ となる.
3. 事実 (C): $0 \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$ $(x, y \in \mathbb{R}^n)$. ただし, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ に対して

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|,$$
$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

1. $X, Y, Z$ をそれぞれ距離空間とする. 二つの写像 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ が連続ならば, その合成写像 $g \circ f : X \to Z$ も連続写像であることを示せ.

(解答例) 任意に $x \in X$ を取る. このとき $g \circ f$ が点 $x$ で連続であることを示せばよい. まず, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ となる $X$ 内の任意の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を取る. このとき $f$ が連続であることおよび事実 (A) より

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

が成り立つ. さらに $g$ も連続であるから, $Y$ 内の点列 $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ に対して事実 (A) を用いることで

$$\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(x))$$

が成り立つ. したがって

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ となる任意の } X \text{ 内の点列 } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ に対して, } \lim_{n\to\infty} (g \circ f)(x_n) = (g \circ f)(x)$$

が成り立つので, 事実 (A) より $g \circ f$ は点 $x \in X$ で連続である.

2. 距離空間 $X, Y, Z$ に対して以下が成り立つことを証明せよ.

(a) $X \simeq X$.

(解答例) $f : X \to X$ を恒等写像とする ($f(x) = x$). 明らかに $f$ は全単射であり, $f^{-1}(x) = x$ である. $f$ 及び $f^{-1}$ は明らかに連続であるため, $f$ は同相写像である.

(b) $X \simeq Y$ ならば $Y \simeq X$.

(解答例) $f : X \to Y$ を同相写像と仮定する. このとき逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ が存在し, $f$ も $f^{-1}$ も連続写像である. これは $f^{-1}$ が同相写像であることに他ならない ($f^{-1}$ が全単射であり, $f^{-1}$ 及び $(f^{-1})^{-1} = f$ が連続写像). したがって $Y \simeq X$.

(c) $X \simeq Y$ かつ $Y \simeq Z$ ならば $X \simeq Z$.

(解答例) $f : X \to Y, g : Y \to Z$ を同相写像と仮定する. このとき逆写像 $f^{-1} : Y \to X, g^{-1} : Z \to Y$ が存在して, $f, f^{-1}, g, g^{-1}$ は全て連続写像である. $g \circ f : X \to Z$ が同相写像であることを示す. 事実 (B) より $g \circ f$ の逆写像は $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ であるから, $g \circ f$ 及び $f^{-1} \circ g^{-1}$ が連続であることを示せばよいが, それは問 1 より従う. よって $X \simeq Z$.

3. 距離空間 $(\mathbb{R}^n, d_1), (\mathbb{R}^n, d_2)$ の間の全単射な写像 $f$ を

$$f : (\mathbb{R}^n, d_1) \to (\mathbb{R}^n, d_2), x \mapsto x$$

と定める (すなわち恒等写像). ただし $d_1, d_2$ は以下で定義される $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である.

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|,$$
$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}. \quad (x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n))$$

このとき $f$ は連続写像であることを示せ. (講義では $f^{-1}$ が連続写像であることを示した. したがって二つの距離空間 $(\mathbb{R}^n, d_1), (\mathbb{R}^n, d_2)$ は同相である.)

(解答例) $f$ が任意の点 $x \in (\mathbb{R}^n, d_1)$ で連続であることを示す. それには事実 (A) より

$$\lim_{m\to\infty} x_m = x \text{ となる } (\mathbb{R}^n, d_1) \text{ の点列 } \{x_m\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ に対して, } \lim_{m\to\infty} f(x_m) = f(x)$$

を示せばよい. 今, $f$ は恒等写像なので

$$\lim_{m\to\infty} x_m = x \text{ となる } (\mathbb{R}^n, d_1) \text{ の点列 } \{x_m\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ に対して, } \lim_{m\to\infty} x_m = x$$

を示せばよい (前者の極限と後者の極限は, 異なる距離空間における点列を対象としていることに注意). 特に点列の収束性の同値条件から

$$(\mathbb{R}^n, d_1) \text{ の点列 } \{x_m\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ が } \lim_{m\to\infty} d_1(x_m, x) = 0 \text{ を満たすならば } \lim_{m\to\infty} d_2(x_m, x) = 0$$

であることを示せばよい. 事実 (C) より

$$0 \leq d_2(x_m, x) \leq d_1(x_m, x)$$

が成り立つから, 確かに $\lim_{n\to\infty} d_1(x_m, x) = 0$ ならばはさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty} d_2(x_m, x) = 0$ となる.