この演習問題では以下の三つの事実を用いても良い.

1. 事実 (A): $f : X \to Y$ を距離空間の間の写像, $x \in X$ とする. このとき以下は同値である.
   (a) f は点 x で連続.
   (b) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ となる任意の X 内の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.
2. 事実 (B): 集合 A, B, C に対して, 写像 $f : A \to B, g : B \to C$ が全単射ならば, 合成写像 $g \circ f$ の逆写像は $f^{-1} \circ g^{-1}$ となる.
3. 事実 (C): $0 \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$ $(x, y \in \mathbb{R}^n)$. ただし, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ に対して

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|,$$
$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

1. X, Y, Z をそれぞれ距離空間とする. 二つの写像 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ が連続ならば, その合成写像 $g \circ f : X \to Z$ も連続写像であることを示せ.

2. 距離空間 X, Y, Z に対して以下が成り立つことを証明せよ.
   (a) $X \simeq X$.

   (b) $X \simeq Y$ ならば $Y \simeq X$.

   (c) $X \simeq Y$ かつ $Y \simeq Z$ ならば $X \simeq Z$.

3. 距離空間 $(\mathbb{R}^n, d_1), (\mathbb{R}^n, d_2)$ の間の全単射な写像 f を

$$f : (\mathbb{R}^n, d_1) \to (\mathbb{R}^n, d_2), x \mapsto x$$

と定める (すなわち恒等写像). ただし d_1, d_2 は以下で定義される $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である.

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|, \\ d_2(x,y) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}. \quad (x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)) \end{aligned}$$

このとき f は連続写像であることを示せ. (講義では f^{-1} が連続写像であることを示した. したがって二つの距離空間 $(\mathbb{R}^n, d_1), (\mathbb{R}^n, d_2)$ は同相である.)